Varianta 16

Subiectul I.

a) 3. b) $5\sqrt{2}$. c) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 50$. d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. e) 15. f) a= -7, b=22.

Subiectul II.

1) a) Calcul direct. b) $\frac{1}{2}$. c) 1. d) x=1. e) -1.

2) a) $2007 \cdot x^{2006}$. b) $\frac{2009}{2008}$. c) $f''(x)>0$ pe $(0,\infty)$. d) 2007. e) e-cos1.

Subiectul III.

a) $x^2 + \hat{2} = \hat{0} \Leftrightarrow x^2 = \hat{3}$, imposibil în $\mathbf{Z}_5$ pemtru ca $x^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}\}$.

b) f ireductibil pentru ca nu are radacini in $\mathbf{Z}_5$ conform punctului a).

c) Calcul direct. d) Calcul direct. e) 25 elemente.

f) Elementul neutru față de "$\circ$" este e = $\hat{0}x + \hat{1} \in$ K ;

$(\hat{a}x + \hat{b})' = \hat{c}x + \hat{d}$, unde $\hat{c} = \hat{a} \cdot (\hat{3}\hat{a}^2 - \hat{b}^2)^{-1}$; $\hat{d} = \hat{b} \cdot (\hat{b}^2 - \hat{3}\hat{a}^2)^{-1}$.

Cum $\forall \alpha \in \mathbf{Z}_5^*$, α este inversabil, obținem că $\hat{3}\hat{a}^2 - \hat{b}^2$ este inversabil, deoarece $\hat{3}\hat{a}^2 - \hat{b}^2 = \hat{0}$ implică $\hat{a} = \hat{b} = \hat{0}$.

g) $(K^*, \circ)$ grup, unde $K^* = \{ \hat{a}x + \hat{b} \neq \hat{0} \mid \hat{a}, \hat{b} \in \mathbf{Z}_5 \}$ $\Rightarrow$ ord K^*= 24. Se arată că dacă $g \in$ K ,

atunci $\underbrace{g \circ g \circ ... \circ g}_{24\,ori} = \hat{1}$. Aşadar $\underbrace{g \circ g \circ ... \circ g}_{25\,ori} = g$.

Subiectul IV.

a) Inmultind inegalitățile: $\begin{cases} 1 - \frac{1}{n^a} < 1 - \frac{1}{(n+1)^a} < 1 - \frac{1}{(2n)^a} \\ .... \\ 1 - \frac{1}{n^a} < 1 - \frac{1}{(2n)^a} = 1 - \frac{1}{(2n)^a} \end{cases}$, obținem $a_n \le b_n \le c_n$, $\forall$ n≥1.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$, pentru a=1si cum 2< e <3 rezultă $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{e}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

d) a=1 $\Rightarrow b_n = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

e) a<1 $\Rightarrow a - 1 < 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a-1}}} = e^{-\infty} = 0$.

f) a>1$\Rightarrow a-1>0$; $\lim_{n\to\infty} c_n = e^{-\frac{1}{2^a}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a-1}}} = e^0 = 1$.

g) Dacă a>1, obținem $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, iar dacă a<1 avem $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Se aplică criteriul cleștelui inegalităților de la a), iar pentru a=1 avem $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$.